

**ОТЗЫВ  
ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА**

на диссертационную работу Панфёрова Антона Александровича  
“Алгоритмы символьных вычислений в системах компьютерной алгебры для линейных дифференциальных систем с выделенными неизвестными”, представленной к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.11 - “Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей”

Диссертационная работа А.А. Панфёрова посвящена разработке алгоритмов символьных вычислений и их программной реализации в системах компьютерной алгебры, направленных на исследования решений систем линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений. Отметим актуальность выполненной диссертационной работы, что связано с перспективами построения метода получения общих решений таких дифференциальных систем. Проблема, на решение которой направлены исследования и разработки А.А. Панфёрова, связана с прикладными запросами, в которых не для всех переменных (в диссертации используется другая терминология – *неизвестные*, что в контексте диссертации является синонимом термина *переменные*) таких дифференциальных уравнений требуется находить решения и/или необходимо исследовать устойчивость по этим переменным. В литературе переменные, для которых необходимо получать решения и исследовать их свойства, называют как «*выделенные*» переменные. В середине 00-х годов С.А. Абрамовым (научным руководителем диссертанта) и М. Бронштейном был разработан алгоритм, который позволяет построить по заданной нормальной дифференциальной системе  $y' = Ay$  новую нормальную дифференциальную систему, но по уже выделенным переменным. Однако в приложениях часто встречаются дифференциальные системы, которые не сводятся к нормальной системе – это случаи, когда матрица при высшей производной (ведущая матрица) необратима. Основным результатом А.А. Панфёрова состоит в обобщении алгоритма Абрамова-Бронштейна на эти случаи. По сути, что подчеркивается в диссертационной работе, необратимость ведущей матрицы означает линейную зависимость между переменными. Поэтому в разработанном алгоритме дифференциальная

система представляется в виде двух систем – нормальную дифференциальную систему, к которой применим алгоритм Абрамова-Бронштейна, и систему алгебраических уравнений. В диссертационной работе получены и другие интересные результаты, среди которых отметим разработку алгоритма распознавания *сателлитных* переменных (это понятие введено в диссертационной работе) - переменных, для которых соответствующие компоненты решений принадлежат тому же дифференциальному расширению, что и компоненты по выделенным переменным. Отметим, научную новизну полученных алгоритмических результатов – диссертанту удалось впервые построить алгоритмы сведения линейных однородных дифференциальных систем произвольного порядка с выделенными неизвестными к нормальным системам первого порядка.

Важно подчеркнуть и результаты по *сателлитным* переменным. Это понятие предложено диссертантом и тут можно отметить теоретическое значение этого нововведения – по таким переменным соответствующие компоненты решения можно получать с помощью тех же методов, что и для выделенных переменных. Практическая значимость выносимых на защиту результатов основывается на том, что все разработанные алгоритмы были реализованы в виде программ в системе компьютерной алгебры Maple – одной из наиболее востребованных исследователями в различных прикладных областях. Научная обоснованность полученных результатов определяется математической строгостью *Определений*, которые являются входными данными (если говорить в ИТ терминах) для разрабатываемых алгоритмов, и для *Теорем* и *Предложений*, лежащих в основании всех основных результатов, строгостью их доказательств, а также математической выверенностью формулировок разработанных алгоритмов и верификацией программных реализаций в системе компьютерной алгебры Maple.

Диссертационная работа А.А. Панфёрова состоит 101 страницы и включает Введение, пять Глав, Заключение и список литературы (39 источников). В диссертации 2 таблицы.

Во Введении обосновывается актуальность работы, формулируются цели и задачи диссертационной работы, подчеркивается научная новизна полученных результатов, представлены выносимые на защиту положения.

В Первой главе даётся обзор средств построений решений дифференциальных систем в системе компьютерной алгебры Maple. Вводится терминология и даются определения по выделенным переменным. Приводится описание алгоритма Абрамова-Бронштейна.

Во Второй главе представлены результаты по разработанному алгоритму, обобщающему алгоритм Абрамова-Бронштейна на случай линейных однородных дифференциальных систем произвольного порядка. Корректность разработанного алгоритма доказывается в Теореме 1.

В Третьей главе вводится понятие сателлитных переменных в линейных дифференциальных системах с выделенными переменными. Представлен алгоритм распознавания сателлитных переменных, который позволяет проверить, является ли какая-то (невыделенная) переменная сателлитной для множества выделенных переменных. Сначала понятие сателлитных переменных вводится для нормальных дифференциальных систем, затем оно обобщается на случай линейных однородных дифференциальных систем произвольного порядка.

В Четвертой главе рассматриваются линейно сателлитные переменные в дифференциальных системах с выделенными переменными. Такие сателлитные переменные являются подклассом просто сателлитных переменных – это случаи, когда соответствующие компоненты решения являются линейными комбинациями выделенных переменных и их производных. Показано, что алгоритм распознавания линейно сателлитных переменных с вычислительной точки зрения существенно проще.

В Пятой главе представлено описание разработанного программного комплекса, реализующего в системе компьютерной алгебры Maple изложенные в диссертации алгоритмы. Этот программный комплекс состоит из двух частей: 1) процедуры Extract, реализующей алгоритм обобщающий алгоритм Абрамова-Бронштейна, и 2) пакета Satellite, в котором собраны процедуры работы с сателлитными переменными. Процедура Extract согласована с включенной в систему Maple программной реализацией алгоритма Абрамова-Бронштейна. В пакет Satellite, в том числе, включена реализация процедур работы с линейно сателлитными переменными. Сделаны оценки быстродействия процедуры Extract и пакета Satellite. В обоих случаях подтверждена полиномиальная сложность ( $O(m^3)$ , где  $m$  это число переменных исследуемой дифференциальной системы) разработанных алгоритмов. В диссертации даются ссылки на размещение кодов процедуры Extract и пакета Satellite на сайте ВЦ имени А.А.Дородницына РАН.

В Заключении формулируются основные результаты, полученные в ходе диссертационной работы, а также обсуждаются направления дальнейших исследований.

Результаты, выносимые диссертантом на защиту, опубликованы в 10 печатных работах. Из них 5 статей опубликованы в реферируемых журналах из перечня ВАК и индексируемых международной базой цитирования Web of Science. Остальные пять публикаций вышли в трудах российских и

международных конференций. Кроме того, результаты докладывались на 3-х российских научных конференциях и 1-й международной конференции по научному профилю диссертации. Результаты докладывались на шести научных семинарах - в Математическом институте имени В.А.Стеклова РАН, в РУДН, на совместном семинаре ВМК МГУ и ВЦ имени А.А.Дородницына РАН, а также на совместном семинаре МГУ имени М.В.Ломоносова и ОИЯИ.

Диссертация А.А. Панфёрова выполнена на высоком научном уровне. Тем не менее можно отметить следующие замечания. Основное замечание состоит в полном отсутствии указаний (например, в обзоре в Первой главе) на конкретику прикладного значения проводимых в диссертационной работе исследований и разработок. Отсюда несколько повисает и сформулированная диссертантом практическая значимость полученных результатов и положений, выносимых на защиту. Имело бы смысл привести несколько примеров, в которых сведение общей задачи к выделенным переменным имеет понятную прикладную обоснованность. Необходимо отметить и немалое количество орфографических и синтаксических ошибок в тексте. Присутствует также неточное использование терминов – например, в качестве одной из современных систем компьютерной алгебры упоминается система Macsyma. Однако уже с 80-х годов прошлого столетия эта система получила другое название, Maxima, в результате серьезной перестройки. Однако подчеркнем, что указанные недостатки не относятся к сугубо положительной оценке полученных в диссертации результатов и выносимых на защиту положений, и не влияют на общую высокую оценку представленной диссертации.

В заключение отметим, что диссертация А.А. Панфёрова представляет собой завершённое исследование, проведенное на высоком научно-техническом уровне. Автореферат диссертации правильно и полно отражает ее содержание.

Приходим к выводу, что диссертационная работа Панфёрова Антона Александровича по теме “Алгоритмы символьных вычислений в системах компьютерной алгебры для линейных дифференциальных систем с выделенными неизвестными”, представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.11 - “Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей”, соответствует положению ВАК о

присуждении ученых степеней, утвержденному постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 №842, а ее автор, Панферов Антон Александрович, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.11.

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук,  
начальник Отдела информационных технологий  
и математического моделирования  
Курчатовского комплекса НБИКСП-технологий  
НИЦ «Курчатовский институт»  
123182 Россия, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1  
тел. +7 915 016-00-48  
e-mail: [ilyin0048@gmail.com](mailto:ilyin0048@gmail.com)

В.А. Ильин  
18.11.2018

Подпись сотрудника НИЦ «Курчатовский институт» В.А. Ильина заверяю  
Главный ученый секретарь \_\_\_\_\_  
НИЦ «Курчатовск  
к.ф.м.н.

С.Ю. Стремоухов