На правах рукописи

Панфёров Антон Александрович

Алгоритмы символьных вычислений в системах компьютерной алгебры для линейных дифференциальных систем с выделенными неизвестными

Специальность 05.13.11 – Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена в Федеральном исследовательском центре «Информатика и управление» Российской академии наук.

Научный руководитель:	**Абрамов Сергей Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ильин Вячеслав Анатольевич**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, начальник отдела Курчатовского комплекса НБИКС-природоподобных технологий Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»
	Гонцов Ренат Равилевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Защита диссертации состоится 20 декабря 2018 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 002.087.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт системного программирования им. В. П. Иванникова Российской академии наук» по адресу: 109004, Москва, ул. А. Солженицына, 25.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института системного программирования Российской академии наук.

Автореферат разослан «_____» __________ 2018 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 002.087.01,

кандидат физико-математических наук Зеленов С. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Одна из важных областей компьютерной алгебры посвящена разработке алгоритмов решения задач, связанных с дифференциальными уравнениями и их системами. Рассматриваемые в этом направлении задачи не ограничиваются поиском и построением в символьном виде решений дифференциальных уравнений и систем, но также включают в себя различные алгоритмы преобразования уравнений, систем или ассоциированных операторов с целью установления различных свойств исходных уравнений или систем. Не все задачи в этой области оказываются алгоритмически разрешимыми, но даже для разрешимых задач вычислительная сложность алгоритмов может быть настолько высокой, что такие алгоритмы оказываются неприменимыми на практике.

Решением дифференциальной системы является вектор, компоненты которого соответствуют неизвестным системы. В некоторых случаях, интерес могут представлять не все компоненты этого вектора, а какая-то их *выделенная* часть. Соответствующие выделенным компонентам решений неизвестные будем также называть *выделенными*. Задачи, приводящие к системам с выделенными неизвестными, возникают в разных областях. Системы, куда помимо «основных» (выделенных) также входят и избыточные неизвестные, типичны для математических моделей реальных явлений. Общее число неизвестных, как правило, больше числа неизвестных, интересующих исследователя. Ещё одной причиной появления в системе избыточных неизвестных является составление систем дифференциальных уравнений возмущённого движения при изучении устойчивости тех или иных движений системы. Эволюция избыточных и «нефизических» неизвестных, как правило, интереса не представляет. Поэтому оправдана и целесообразна постановка задачи частичной устойчивости и стабилизации по отношению к выделенным неизвестным.

Как правило, системы компьютерной алгебры не предоставляют специализированных средств решения дифференциальных систем относительно части неизвестных. Существующие и реализованные алгоритмы поиска решений дифференциальных систем позволяют находить решения разного вида (полиномиальные, рациональные, в виде рядов и др.), но только такие, все компоненты которых имеют указанный вид. При частичном построении решений (поиск только выделенных компонент) вид невыделенных компонент интереса не представляет. Несоответствие вида выделенных и невыделенных компонент решений может приводить к невозможности использования общих алгоритмов построения решений дифференциальных систем. Для решения этой проблемы С. А. Абрамовым и М. Бронштейном[1] был разработан AB-алгоритм, реализация которого вошла в систему компьютерной алгебры Maple. AB-алгоритм позволяет построить по заданной нормальной дифференциальной системе $y' = Ay$ с выделенными неизвестными новую нормальную дифференциальную систему, неизвестными в которой будут только выделенные неизвестные исходной системы и их производные. Решение построенной системы позволяет получить выделенные компоненты решений исходной системы.

Линейные однородные систем обыкновенных дифференциальных уравнений представимы в виде

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = 0,$$

где $r \in \mathbb{N}$ — порядок системы, A_i — матрицы размера $m \times m$, $A_r \neq 0$ — *ведущая* матрица, $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ — вектор неизвестных. Нормальные дифференциальные системы являются частным случаем линейных однородных дифференциальных систем первого порядка с обратимой ведущей матрицей.

[1] Абрамов С. А., Бронштейн М. Решение линейных дифференциальных и разностных систем по отношению к части неизвестных // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2006, №2, С.229–241

АВ-алгоритм, реализованный в Maple, позволяет работать только с нормальными дифференциальными системами. И одной из задач, решаемых в диссертации, является разработка для системы компьютерной алгебры Maple процедуры, позволяющей применять реализованный АВ-алгоритм для общего случая систем линейных однородных дифференциальных уравнений.

В диссертации также вводится понятие *сателлитных* неизвестных: в дифференциальной системе с выделенными неизвестными мы называем *сателлитной* такую невыделенную неизвестную, соответствующая которой компонента решений принадлежит тому же дифференциальному расширению, что и выделенные компоненты, т. е. если выделенные компоненты решения имеют «хороший» вид, то и сателлитные тоже автоматически будут иметь «хороший» вид. Существование возможности эффективно определять сателлитные неизвестные позволяет при частичном решении систем относительно выделенных компонент почти задаром получать и сателлитные компоненты.

Цель диссертационной работы. Целью диссертационной работы является разработка для системы компьютерной алгебры Maple процедуры, позволяющий обобщить имеющуюся реализацию АВ-алгоритма на случай линейных однородных дифференциальных систем произвольного порядка, а также реализация процедур распознавания сателлитных неизвестных в линейных однородных дифференциальных системах с выделенными неизвестными.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

- разработать алгоритм преобразования линейных однородных дифференциальных систем с выделенными неизвестными к виду, допускающему применение алгоритма Абрамова–Бронштейна;

- разработать алгоритмы распознавания сателлитных неизвестных в линейных однородных дифференциальных системах с выделенными неизвестными;

- разработать программный комплекс, реализующий алгоритмы для работы с линейными дифференциальными системами с выделенными неизвестными.

Научная новизна. В диссертации получен ряд результатов, обладающих научной новизной:

- Разработан алгоритм Extract, позволяющий получать по линейной дифференциально-алгебраической системе полного ранга с выделенными неизвестными пару систем: нормальную дифференциальную и алгебраическую, — которые являются согласованными с исходной системой и множеством выделенных неизвестных. Алгоритм Extract позволяет обобщить на случай линейных однородных дифференциальных систем произвольного порядка известные алгоритмы, предназначенные для нормальных дифференциальных систем с выделенными неизвестными.

- Разработаны алгоритмы распознавания сателлитных неизвестных в линейных однородных дифференциальных системах с выделенными неизвестными.

- В среде Maple разработан программный комплекс, включающий реализацию алгоритма Extract, а также процедуры распознавания сателлитных неизвестных.

Теоретическая и практическая значимость. Предложенные в диссертации алгоритмы могут быть реализованы и встроены в существующие системы компьютерной алгебры. Реализация для Maple доступна по адресу `http://www.ccas.ru/ca/`. Разработанные алгоритмы могут быть использованы совместно с процедурами поиска решений линейных дифференциальных систем. Предложенное понятие сателлитных неизвестных может быть полезно при описании свойств решений линейных однородных дифференциальных систем, а также в контексте задач построения частичных решений таких систем.

Положения, выносимые на защиту.

- Алгоритм Extract, позволяющий обобщить на случай полноранговых линейных однородных дифференциальных систем произвольного порядка известные алгоритмы, сформулированные для нормальных дифференциальных систем с выделенными неизвестными (в частности — AB-алгоритм).

- Алгоритмы распознавания сателлитных неизвестных в линейных однородных дифференциальных системах с выделенными неизвестными.

- Программный комплекс для системы компьютерной алгебры Maple, включающий реализацию предложенных алгоритмов.

Апробация работы. Основные результаты по теме диссертации были представлены на следующих конференциях и семинарах:

- Объединенный семинар «Компьютерная алгебра» МГУ и ЛИТ ОИЯИ, г. Дубна, 2014, 2015 и 2016 гг.

- Семинар «Компьютерная алгебра» факультета ВМК МГУ и ВЦ РАН, г. Москва, 2015 и 2016 гг.

- Конференция «Актуальные вопросы программирования», посвящённая 90-летию со дня рождения Н. П. Трифонова, г. Москва, 2015 г.

- Международная конференция «FELIM», г. Лимож, Франция, 2016 и 2017 гг.

- Международная конференция «Компьютерная алгебра», г. Москва, 2016 и 2017 гг.

- Научная конференция «Ломоносовские чтения», г. Москва, 2017 и 2018 гг.

- Семинар «Аналитическая теория дифференциальных уравнений» Математического института РАН им. Стеклова, г. Москва, 2018 г.

- Семинар «Математическое моделирование» кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН, г. Москва, 2018 г.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах из перечня ВАК и индексируемых Web of Science.

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 101 страницу. Список литературы содержит 39 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая и теоретическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту результаты и положения.

В первой главе даётся краткий обзор средств построений решений дифференциальных систем на примере системы компьютерной алгебры Maple. Также приводятся основные определения из теории дифференциальных систем, необходимые для формулировки разрабатываемых алгоритмов. Рассматриваются *нормальные* дифференциальные системы вида

$$y' = Ay,$$

где A — матрица размера $m \times m$ над некоторым дифференциальным полем K характеристики 0, $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ — вектор неизвестных, некоторые компоненты которого *выделены*. Множество выделенных неизвестные обозначим через s: $s = \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}\}$. Приводится описание AB-алгоритма, послужившего отправной точкой исследований, изложенных в диссертации. AB-алгоритм позволяет по нормальной дифференциальной системе S с выделенными неизвестными s построить новую нормальную дифференциальную систему S_s^{AB}, неизвестными которой являются выделенные неизвестные исходной системы и их производные. Также обсуждаются свойства этого алгоритма, приводится оценка его сложности. Кроме определений и фактов относительно нормальных дифференциальных систем, обсуждаются линейные однородные дифференциальные системы высоких порядков вида

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = 0, \tag{1}$$

где натуральное r — порядок системы, A_r — ведущая матрица ($A_r \neq 0$). Показывается, что для систем (1) порядка $r > 1$ всегда можно построить эквивалентную систему первого порядка

$$A_1 y' + A_0 y = 0, \tag{2}$$

поэтому в следующих главах рассмотрение систем высоких порядков ограничивается рассмотрением систем вида (2).

Вторая глава посвящена разработке алгоритма процедуры, обобщающей имеющуюся в Maple реализацию AB-алгоритма (процедуру `ReducedSystem`) на случай линейных однородных дифференциальных систем произвольного порядка. Для такого обобщения достаточно рассмотреть случай дифференциальных систем первого порядка вида (2). Если ведущая матрица системы (2) обратима, то можно получить нормальную дифференциальную систему $y' = Ay$, где $A = -A_1^{-1}A_0$, и использование AB-алгоритма не представляет сложности. В случае, если A_1 является вырожденной, построить эквивалентную нормальную систему нельзя. Системы вида (2), у которых ведущая матрица является вырожденной, называются линейными *дифференциально-алгебраическими* системами. Специально для работы с дифференциально-алгебраическими системами был разработан алгоритм Extract.

Алгоритм Extract для линейной дифференциальной системы S вида (2) с выделенными неизвестными s позволяет построить две системы: нормальную дифференциальную систему S_d, имеющую вид

$$\tilde{y}' = A\tilde{y},$$

где новый вектор неизвестных $\tilde{y}$ состоит из части неизвестных исходной системы. Таким образом, $\tilde{y}$ содержит в общем случае лишь часть выделенных неизвестных. Также алгоритм Extract строит алгебраическую систему S_a, позволяющую выразить линейно те выделенные неизвестные, которые не вошли в $\tilde{y}$, только через выделенные неизвестные из $\tilde{y}$. Алгоритм Extract предполагает работу с приведённой по строкам системой (2), для чего может быть использован известный алгоритм Row-Reduction. Приведённый по строкам вид гарантирует разбиение уравнений дифференциально-алгебраической системы на дифференциальные и алгебраические. Алгоритм состоит из трёх этапов:

1. исключение невыделенных неизвестных;

2. исключение выделенных неизвестных;

3. построение матриц систем S_d и S_a.

Исключения неизвестных, производимые на первом и втором этапах алгоритмов, выполняются с использованием алгебраических уравнений системы и являются унимодулярным преобразованием системы (может быть описано как умножение операторной матрицы системы слева на унимодулярную, т. е. обратимую, операторную матрицу). Доказывается корректность алгоритма Extract, а именно доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть дифференциальная система* $A_1y' + A_0y = 0$ $(A_1, A_0 \in K^{m\times m}, A_1 \neq 0)$ *имеет полный ранг. Пусть выделена часть неизвестных, т. е. часть компонент вектора* y. *В этом случае для некоторой части* $\tilde{y}$ *компонент вектора* y *всегда можно построить систему вида* $\tilde{y}' = B\tilde{y}$ *так, что выделенные компоненты* y, *не вошедшие в* $\tilde{y}$, *линейно выражаются через вошедшие в* $\tilde{y}$ *выделенные компоненты.*

Вводится понятие согласованных систем:

Определение 1. Системы S_d, S_a называются *согласованными* с (S, s), если выделенные компоненты s решений S в любом дифференциальном расширении исходного дифференциального поля однозначно определяются системами S_d, S_a.

Доказывается, что системы, строящиеся алгоритмом Extract, являются согласованными. Также показывается, что для согласованных с (S, s) систем размер (число уравнений) алгебраической системы определяется однозначно. А именно доказывается следующее

Предложение 1. *Пусть системы S_d, S_a согласованы с (S, s). Тогда размер S_a и количество выделенных неизвестных S, попадающих в S_d, определяются однозначно исходной системой S и множеством выделенных неизвестных.*

В заключительном разделе главы приводится схема алгоритма ExtrAB, являющегося обобщением AB-алгоритма на дифференциальные системы произвольного порядка. Алгоритм ExtrAB заключается в сведении системы порядка $r > 1$ к системе первого порядка вида (2), применении к полученной системе алгоритма Extract с последующим применением AB-алгоритма к строящейся алгоритмом Extract системе S_d. Доказывается, что размер дифференциальной системы на выходе ExtrAB является минимальным.

Результаты второй главы опубликованы в работах [1, 2].

В третьей главе вводится понятие *сателлитных* неизвестных в линейных дифференциальных системах с выделенными неизвестными.

Рассматривается нормальная дифференциальная система S с выделенными неизвестными $s = \{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}\}$ $(0 < k < m)$. Пусть F_s является дифференциальным полем, порождённым над K выделенными компонентами всех решений системы S.

Определение 2. Невыделенная неизвестная y_j системы S называется *сателлитной* для множества выделенных неизвестных s, если j-е компоненты всех решений S принадлежат F_s.

Показывается, что для случая $K = \overline{\mathbb{Q}}(x)$ задача распознавания сателлитных неизвестных в нормальных дифференциальных системах с выделенными неизвестными алгоритмически разрешима, приводится алгоритм, решающий эту задачу, и доказывается его корректность. Алгоритм распознавания сателлитных неизвестных позволяет проверить, является ли наперёд взятая невыделенная неизвестная y_j сателлитной для множества выделенных неизвестных s в нормальной системе S. Для этого с помощью AB-алгоритма строится система S_s^{AB}, размер которой сравнивается с размером исходной системы. При совпадении размеров делается заключение, что неизвестная y_j является сателлитной. Иначе строится система $S_{s\cup\{y_j\}}^{\mathrm{AB}}$. В случае совпадения размеров систем $S_{s\cup\{y_j\}}^{\mathrm{AB}}$ и S_s^{AB}, алгоритм завершает работу с сообщение, что y_j является сателлитной. На следующем этапе алгоритма требуется сравнение расширений Пикара–Вессио ранее построенных систем S_s^{AB} и $S_{s\cup\{y_j\}}^{\mathrm{AB}}$. При равенстве этих расширений делается заключение, что y_j является сателлитной для s в исходной системе S. В противном случае y_j не является сателлитной, и алгоритм завершается с отрицательным ответом. Задача сравнения расширений Пикара–Вессио может быть решена алгоритмически, например, с использованием алгоритма Хрушовского для построения дифференциальных групп Галуа нормальных дифференциальных систем.

Понятие сателлитных неизвестных обобщается на случай линейных однородных дифференциальных систем высокого порядка. Показывается, как с помощью алгоритма Extract обобщается на случай систем (2) представленный алгоритм распознавания сателлитных неизвестных в нормальных дифференциальных системах. Также приводятся примеры использования распознавания сателлитных неизвестных в задачах построения частичных решений дифференциальных систем.

Алгоритм Хрушовского, использующийся для сравнения расширений Пикара–Вессио, имеет высокую трудоёмкость, из-за чего реализация алгоритма распознавания сателлитных неизвестных в системах компьютерной алгебры и его практическое использование не целесообразны. Обсуждаются частичные алгоритмы распознавания сателлитных неизвестных, работающие за разумное время, но не всегда дающие ответ.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [3, 4, 7].

В четвёртой главе рассматриваются *линейно сателлитные* неизвестные в дифференциальных системах с выделенными неизвестными, являющиеся подклассом сателлитных неизвестных. Алгоритм распознавания линейно сателлитных неизвестных оказывается значительно проще с вычислительной точки зрения, по сравнению с алгоритмом распознавания сателлитных неизвестных.

Рассматривается нормальная дифференциальная система S с выделенными неизвестными $s = \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}\}$ $(0 < k < m)$. Обозначим через $F_s(y)$ линейное пространство над K, порождённое выделенными компонентами решения y.

Определение 3. Невыделенная неизвестная y_j называется *линейно сателлитной* неизвестной для множества выделенных неизвестных s в системе S, если для любого решения y верно, что его j-я компонента принадлежит $F_s(y)$.

Приводится алгоритм распознавания линейно-сателлитных неизвестных в нормальных дифференциальных системах и доказывается его корректность. Алгоритм отличается от алгоритма распознавания сателлитных неизвестных отсутствием наиболее затратного по времени шага, на котором происходит сравнение расширений Пикара–Вессио. Это обстоятельство обуславливает сравнительно небольшую трудоёмкость алгоритма и обеспечивает возможность его полноценной реализации в системах компьютерной алгебры, а также практическое применение.

Алгоритм распознавания линейно сателлитных неизвестных для нормальных систем обобщается на случай линейных дифференциальных систем произвольного порядка с помощью алгоритма Extract.

Обсуждается взаимосвязь сателлитных и линейно сателлитных неизвестных, а также возможность распознавания сателлитных неизвестных при помощи алгоритма распознавания линейно-сателлитных неизвестных. Приводятся примеры систем, в которых для любого фиксированного множества выделенных неизвестных каждая линейно сателлитная неизвестная является сателлитной. Доказывается, что все неприводимые системы обладают этим свойством. Как дополнительный результат приводится алгоритм факторизации нормальных дифференциальных систем, основанный на AB-алгоритме и имеющий полиномиальное время работы. Алгоритм применим не ко всем системам, но возможность его применения определяется алгоритмически также за полиномиальное время.

Приводятся примеры возможных применений алгоритмов распознавания линейно сателлитных неизвестных. Среди них рассматривается задача построения частичных решений систем дифференциальных уравнений, когда есть необходимость построения не всех компонент решений, а только части из них. Построение выделенной части компонент решений обеспечивается для нормальных систем AB-алгоритмом и алгоритмом ExtrAB для систем высокого порядка. Возможность распознавания линейно сателлитных неизвестных позволяет дополнительно к выделенным компонентам гарантированно находить и линейно сателлитные для них.

В качестве ещё одного приложения рассматривается задача частичной устойчивости. Рассматривается автономная дифференциальная система

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \tag{3}$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t))^T$, A — постоянная матрица размера $m \times m$.

В системе (3) переменные, входящие в вектор $\mathbf{y}$, разбиваются на две группы: 1) переменные $y_1, \ldots, y_k$ $(1 \le k < m)$, по отношению к которым исследуется устойчивость положения равновесия (*невозмущённого движения*) $\mathbf{y} = \mathbf{0}$; 2) оставшиеся переменные $y_{k+1}, \ldots, y_m$. Обозначим $s = \{y_1, \ldots, y_k\}$ — множество *выделенных* неизвестных, $\mathbf{y}_s = (y_1, \ldots, y_k)^T$. Невыделенные переменные $y_{k+1}, \ldots, y_m$ часто называют *«неконтролируемыми»* переменными; при изучении задачи частичной устойчивости поведение этих переменных системы (3) исследователя в принципе не интересует.

Обозначим $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ решение системы (3), определённое начальными условиями $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0; t_0, \mathbf{y}_0)$, положим $\|\mathbf{y}\| = \left(\sum y_i^2\right)^{1/2}$.

Невозмущённое движение $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (3) называется:

- *устойчивым по отношению к выделенным неизвестным* (кратко $\mathbf{y}_s$-*устойчивым*), если для любых чисел $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ найдётся число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$ следует $\|\mathbf{y}_s(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

- *асимптотически $\mathbf{y}_s$-устойчивым*, если оно $\mathbf{y}_s$-устойчиво и, кроме того, для каждого $t_0 \geq 0$ существует число $\Delta(t_0) > 0$ такое, что решение $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ с $\|\mathbf{y}_0\| < \Delta$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{y}_s(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| = 0$.

Предложение 2. *Пусть невозмущённое движение $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (3) $\mathbf{y}_s$-устойчиво (асимптотически $\mathbf{y}_s$-устойчиво) и пусть невыделенная неизвестная $y_j \notin s$ является линейно сателлитной для s. Тогда невозмущённое движение $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ будет также $\mathbf{y}_{s\cup\{y_j\}}$-устойчиво (асимптотически $\mathbf{y}_{s\cup\{y_j\}}$-устойчиво).*

Результаты четвёртой главы опубликованы в работах [5, 6, 8–10].

В пятой главе приводится описание разработанного программного комплекса символьных вычислений, реализующего изложенные в работе алгоритмы. Программный комплекс реализован на языке системы компьютерной алгебры Maple и состоит из двух частей: 1) процедуры Extract, реализующей одноимённый алгоритм и 2) пакета Satellite, в котором собраны процедуры работы с сателлитными неизвестными.

Вид входных параметров и выходных результатов процедуры Extract согласован с имеющейся в Maple реализацией AB-алгоритма (процедура `ReducedSystem` подпакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`). Реализация процедуры Extract опирается на возможности, предоставляемые стандартным пакетом `OreTools`. Операции исключения неизвестных, на которых построен алгоритм, описываются преобразованиями операторных матриц. Для представления операторных матриц и операций над ними используется базовый матричный тип Maple, в качестве элементов которого используются структуры *OrePoly*, являющиеся внутренним представлением полиномов Оре. Операции над *OrePoly* для различных случаев, задаваемых с помощью процедуры `OreTools:-SetOreRing`, реализованы в пакете `OreTools`. Алгоритм Extract принимает на вход систему вида (2), приведённую по строкам. Реализация процедуры Extract в качестве начального этапа осуществляет при необходимости приведение заданной системы по строкам, используя специальную реализацию алгоритма Row-Reduction для случая систем вида (2). В процессе выполнения алгоритма Row-Reduction может быть обнаружено, что заданная система не является системой полного ранга. В этом случае выполнение процедуры завершается сообщением об ошибке. Исходный код процедуры Extract доступен по адресу `http://www.ccas.ru/ca/extract`.

В пакет `Satellite` включены процедуры `Testing` и `Determination`, реализующие частичные алгоритмы распознавания сателлитных неизвестных.

Процедура `Testing(A,s,j)` позволяет для нормальной дифференциальной системы, заданной матрицей `A`, определить, является ли неизвестная с индексом `j` сателлитной для выделенных неизвестных, множество индексов которых указано вторым параметром. Процедура возвращает `true`, если ей удаётся установить, что неизвестная с индексом `j` является сателлитной. В противном случае возвращается `FAIL`, что означает невозможность установить, является ли неизвестная сателлитной или нет. Процедура использует в своей работе вызов процедуры `OreTools:-Consequences:-ReducedSystem`. Для проверки рациональной эквивалентности строящихся систем строятся рациональные решения дифференциальной системы с привлечением процедуры `RationalSolutions` из входящего в поставку Maple пакета

LinearFunctionalSystems.

Процедура Determination(M,s) позволяет построить три множества индексов невыделенных неизвестных: 1) множество индексов неизвестных, являющихся сателлитными для выделенных; 2) множество индексов неизвестных, которые не являются сателлитными для выделенных и 3) множество индексов неизвестных, для которых не удалось установить, являются они сателлитными для выделенных или нет. При этом процедура может работать как с нормальными системами (параметр M в этом случае должен быть матрицей системы), так и с системами высокого порядка. В последнем случае в качестве M должен выступать список матричных коэффициентов системы. Процедура использует обращение к процедуре Extract и Testing. Сведение дифференциальных систем высоких порядков к системам первого порядка осуществляется с помощью матричных операций, встроенных в Maple.

В пакет Satellite также включена реализация процедур работы с линейно сателлитными неизвестными. Процедура LinSatTesting(A,s,v) позволяет проверить, является ли неизвестная с индексом v линейно сателлитной в нормальной дифференциальной системе, заданной матрицей A, по отношению к множеству выделенных неизвестных, заданному множеством индексов неизвестных s. Результатом процедуры является логическое значение значение true, если неизвестная с индексом v является линейно сателлитной, и false иначе. Процедура LinSatTesting имеет ещё одну форму вызова с четырьмя параметрами: LinSatTesting(A,s,v,'B'). Последний параметр B, в качестве которого допустимо передавать только имена, используется в качестве выходного. В случае, если тестируемая неизвестная является линейно сателлитной для s, в этом параметре возвращаются коэффициенты линейного выражения неизвестной с индексом v через выделенные неизвестные и их производные.

Ещё одна процедура LinearlySatellite(M,s) позволяет построить множество индексов линейно сателлитных неизвестных для выделенных неизвестных, множество индексов которых заданы параметром `s`, в системе, заданной параметром `M`. Процедура позволяет работать не только с нормальными системами, но и с системами высоких порядков (задаются в виде списка матричных коэффициентов).

Исходный код пакета `Satellite` доступен в Интернете по адресу: `http://www.ccas.ru/ca/satellite`.

В Заключении формулируются основные результаты диссертационной работы и рассматриваются направления дальнейших исследований.

Основные результаты диссертации

- Разработан алгоритм Extract, обобщающий AB-алгоритм на случай линейных однородных дифференциальных систем произвольного порядка.

- Разработаны алгоритмы распознавания сателлитных неизвестных в линейных дифференциальных системах с выделенными неизвестными.

- На основе предложенных алгоритмов разработан программный комплекс символьных вычислений в среде компьютерной алгебры Maple. Исходный код программ доступен по адресу `http://www.ccas.ru/ca`.

Список публикаций по теме диссертации

1. А. А. Панферов. Системы дифференциальных уравнений с выделенной частью неизвестных // Программирование, 2015, №2, стр. 26–36.

2. А. А. Панфёров. О разбиениях множества выделенных неизвестных в линейных дифференциально-алгебраических системах // Программирование, 2016, №2, стр. 41–48.

3. A. A. Panferov. Selected and satellite unknowns in linear differential systems // Advances in Applied Mathematics, 2017, vol. 85, p. 1–11.

4. А. А. Панфёров. Частичные алгоритмы определения сателлитных неизвестных // Программирование, 2017, № 2, стр. 72–80.

5. А. А. Панфёров. Сателлитные неизвестные в неприводимых дифференциальных системах// Программирование, 2018, № 2, стр. 42–50.

6. A. A. Panferov. (2018) Linearly satellite unknowns in linear differential systems. In: Schneider C., Zima E. (eds) Advances in Computer Algebra. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 226, p. 215–227. Springer, Cham.

7. A. A. Panferov. On determination of satellite unknowns in linear differential systems. // Компьютерная алгебра. Сборник научных статей. Труды международной конференции «Компьютерная алгебра». Москва, 29 июня – 2 июля 2016 г. Под ред. С.А.Абрамова и Л.А.Севастьянова. М.: ФИЦ ИУ РАН, с. 78–80, 2016.

8. А. А. Панфёров. Символьный алгоритм распознавания сателлитных неизвестных в линейных дифференциальных системах с выделенными. // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, 17–26 апреля 2017 г. Тезисы докладов. М: МАКС Пресс, с. 122–122, 2017.

9. A. A. Panferov. Irreducible differential systems and satellite unknowns. // Компьютерная алгебра : материалы Международной конференции. Москва, 30 октября – 3 ноября 2017 г. / отв. ред. С. А. Абрамов, Т. М. Садыков. – Москва : ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В.Плеханова», с. 144–150, 2017.

10. А. А. Панфёров. Линейно сателлитные неизвестные в задаче частичной устойчивости линейных автономных дифференциальных систем. // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. М: МАКС Пресс, с. 94–95, 2018.